31-03-16

Συμπερασματολογία για Διακυμάνσεις

Α] Μία Διακύμανση (X^2-τεστ)

→ Παράδειγμα 4.7 {Βιβλίο : Σ. Λουκά}

Για να ελέγξουμε τις υποθέσεις :

i) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ v $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$ {σ_0: γνωστό}

ii) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ v $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$

iii) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ v $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό:

$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim X^2_{n-1}$ όταν αληθεύει η H_0 και για επίπεδο σημαντικότητας α, οι κρίσιμες περιοχές είναι αντίστοιχα:

i) $X^2 \geq X^2_{\alpha, n-1}$

ii) $X^2 \leq X^2_{1-\alpha, n-1}$

iii) $X^2 \leq X^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ v $X^2 \geq X^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$

B) Σύγκριση δύο διακυμάνσεων (F-τεστ)

→ Παράδειγμα 4.8 {Βιβλίο Ζ. Λουκά}

Για τον έλεγχο των υποθέσεων

i) $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ v $H_a: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

ii) $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ v $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

iii) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ v $H_a: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$ όταν αληθεύει η H_0
και για το επίπεδο σημαντικότητας α
οι κρίσιμες περιοχές είναι:

i) $F \geq F_{a, n_1-1, n_2-1}$

ii) $F \leq F_{1-a, n_1-1, n_2-1}$

iii) $F \geq F_{a/2, n_1-1, n_2-1}$ v $F \leq F_{1-\frac{a}{2}, n_1-1, n_2-1}$

Άσκηση 4,1 σελ. 137 {Βιβλίο Σ. Λουκά}

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) \sim N(\mu_{x_1}, \sigma^2)$ Νδο $\forall\, w \in [0,1]$ η στατιστική συνάρτηση

$\underset{\sim}{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2}) \sim N(\mu_{y_1}, \sigma^2)$ $U = U(x,y) = wS_x^2 + (1-\omega) S_y^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2

Έχουμε: $E(U) = \omega E(S^2x) + (1-\omega) E(S^2y) = \omega\sigma^2 + (1-\omega)\sigma^2 = \sigma^2$

Δηλαδή, U αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2

• Για ποια τιμή του w ο εκτιμητής U έχει διακύμανση

$Var(U) = w^2 Var(S_x^2) + (1-\omega)^2 Var(S^2y) = \omega^2 \frac{2\sigma^2}{n_1-1} + (1-\omega)\frac{2\sigma^2}{n_2-1}$

Αφού $\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n_1-1} \to Var\left[\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2}\right] = 2(n_1-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(n_1-1)^2}{\sigma^4} Var(S^2x) = 2(n_1-1) \Rightarrow Var(S_x^2) = \frac{2\sigma^4}{n_1-1}$

Ανάλογα, προκύπτει $Var(S_y^2) = \frac{2\sigma^4}{n_2-1}$

$g(\omega) = 2\sigma^4\left(\frac{\omega^2}{n_1-1} + (1-\omega)^2 \frac{1}{n_2-1}\right) = \frac{2\sigma^4}{(n_1-1)(n_2-1)}\left[(n_1+n_2-2)\omega^2 - 2(n_1-1)\omega + (n_1-1)\right]$

$f(\omega) = (n_1+n_2-2)\omega^2 - 2(n_1-1)\omega + n_1 - 1$

$f'(\omega) = 2(n_1+n_2-2)w - 2(n_1-1)$

$f'(\omega)=0 \Rightarrow w=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$

$f''(\omega)=2(n_1+n_2-2)>0$, άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο για $\omega=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$

κι επειδή $\dfrac{2\sigma^4}{(n_1-1)(n_2-1}>0$, σταθερή, τότε κι η $g(\omega)$ παρουσιάζει ελάχιστο για

$w=\dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$

Συνεπώς, ο καλύτερος εκτιμητής του σ^2 είναι:

$$U=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}S_x^2+\left(1-\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}\right)S_y^2=$$

$$=\frac{(n_1-1)S_x^2+(n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}=S_p^2$$